广义相对论总结

叶依林 *

2020 年 12 月 11 日更新
from Nov. 14, 2020

摘要

本文参考：https://www.zhihu.com/question/53496530/answer/544322909

目录

*整理于湖南大学

1 引力势能

参考 *https://www.zhihu.com/question/416630965*

对于引力场，我们熟知引力 $\vec{F}$ 对距离 r 满足平方反比关系

$$\vec{F} = \frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r = \frac{GMm}{r^3}\vec{r}$$

引力场为

$$\vec{A} = \frac{GM}{r^3}\vec{r} = \vec{\nabla}\Phi$$

引力势 Φ 取无穷远处为零势面，可以得到

$$\Phi = -\int_r^\infty \frac{GM}{r^2}dr = -\frac{GM}{r}$$

对于封闭曲面内的点质量 M，质量通量满足

$$\Phi = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

取任意封闭曲面为球面得到

$$\Phi = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{GM}{r^2}dS = \frac{GM}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = 4\pi GM$$

我们知道

$$M = \iiint_V \rho dV = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^r r^2 dr\rho = 4\pi\rho\cdot\frac{r^3}{3}$$

由积分的高斯定理（数学上的）

$$4\pi G\iiint_V \rho dV = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}dV$$

可得引力场的泊松方程

$$\boxed{\nabla^2\Phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 4\pi G\rho}$$

另外，我们还可以用以下方法得到同样结果：

$$\nabla^2\Phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot(\frac{GM}{r^3}\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{4}{3}\pi G\rho(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})\right) = \frac{4}{3}\pi G\rho\vec{\nabla}\cdot(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}) = 4\pi G\rho$$

2 度规和张量

对闵可夫斯基时空，常用如下度规：$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poincaré 度规为 $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$

电磁张量
https://www.zhihu.com/question/383212450/answer/1139032723
https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_tensor

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} F^{\alpha\beta} \eta_{\beta\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

能动张量对称，有 $T^{ab} = T^{ba}$。其中，T^{00} 代表能量密度；$T^{0i} = T^{i0}$ 代表能量通过 x^i 表面之通量，也等于第 i 动量之密度；T^{ij} 代表 i 动量通过 x^j 表面之通量，其中 T^{ii} 代表一个类似压力的物理量——正向应力 (normal stress)，而 T^{ij} 代表剪应力 (shear stress)。

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \qquad \text{(perfect fluid)}$$

3 作用量 & 原理

设动能为 T，势能为 V，则系统的 Lagrange 量为

$$L = T - V$$

对其进行 Legrendre 变换可以得到系统的 Hamilton 量

$$H = T + V$$

对于含势能的体系，其作用量定义为：

$$S = \int L dt = \int dt \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 - V(x) \right]$$

若势能为 0，则

$$S=\int Ldt=\int dt\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2\right]=\frac{1}{2}m\int\frac{(d\vec{x})^2}{dt}$$

若忽略下式中高阶项

$$\left(a-\frac{\epsilon^2}{2a}\right)^2=a^2-\epsilon^2+\frac{\epsilon^4}{4a^2}$$

则有以下近似关系：

$$\sqrt{a^2-\epsilon^2}\approx a-\frac{\epsilon^2}{2a}+\cdots$$

$$\frac{\epsilon^2}{2a}\approx-\sqrt{a^2-\epsilon^2}+a+\cdots$$

因此我们有

$$\frac{(\Delta\vec{x})^2}{2\Delta t}=c\frac{(\Delta\vec{x})^2}{2c\Delta t}=-c\sqrt{(c\Delta t)^2-(\Delta\vec{x})^2}+c^2\Delta t$$

即

$$S=-mc\int\sqrt{(cdt)^2-(d\vec{x})^2}+mc^2\int dt$$

上式后一项仅取决于 $t_{initial}$ 和 t_{final}，对变分无贡献，可直接去掉。最终得到常见表达为：

$$\boxed{S=-m\int\sqrt{dt^2-(d\vec{x})^2}=-m\int\sqrt{-\eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu}}$$

$$S=-m\int\sqrt{-\eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu}=-m\int d\zeta\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\zeta}\frac{dX^\nu}{d\zeta}}=\int Ld\zeta$$

$$L=-m\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\zeta}\frac{dX^\nu}{d\zeta}}$$

上式对**无质量粒子**不适用，我们重新定义：

$$\tilde{S}=-\frac{1}{2}\int d\zeta\left(\sigma(\zeta)\left(\frac{dX}{d\zeta}\right)^2+\frac{m^2}{\sigma(\zeta)}\right)$$

其中

$$\left(\frac{dX}{d\zeta}\right)^2=-\eta_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\zeta}\frac{dX^\nu}{d\zeta}$$

由于 $\frac{d\sigma}{d\zeta}$ 未出现在表达式中，根据 E-L 方程有

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\frac{d\sigma}{d\zeta}}\right)-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\sigma}=0\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\sigma}=0$$

得到

$$\frac{m^2}{\sigma(\zeta)^2}=\left(\frac{dX}{d\zeta}\right)^2$$

将 X^λ 代入 E-L 方程，由于 $\tilde{S}$ 不显含 X^λ，有：

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\frac{dX^\lambda}{d\zeta}}\right)=\frac{d}{d\zeta}\left(\sigma\eta_{\mu\lambda}\frac{dX^\mu}{d\zeta}\right)=\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{m}{\sqrt{(\frac{dX}{d\zeta})^2}}\eta_{\mu\lambda}\frac{dX^\mu}{d\zeta}\right)=0$$

通过定义 $(\frac{dX}{d\tau})^2=1$，可将 $d\zeta$ 换为 $d\tau$，因此 $\frac{d^2X^\mu}{d\tau^2}=0$，可重新得到与 S 一致的表达式。

综上，无质量粒子有

$$S_{massless}=\frac{1}{2}\int d\zeta\left(\sigma\eta_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\zeta}\frac{dX}{d\zeta}\right)$$

势能在根号外，Option E : (electromagnetism)

$$S=-\int\left[m\sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}+V(x)dt\right]$$

势能在根号内，Option G : (gravity)

$$S=-m\int\sqrt{\left(1+\frac{2V}{m}\right)dt^2-d\vec{x}^2}$$

Option E improved :

$$S=-\int\left[m\sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}+A_\mu(x)dx^\mu\right]$$

Option G improved :

$$S=-m\int\sqrt{-g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu}$$

4 测地线

测地线方程为：

$$\frac{\partial^2X^\lambda}{\partial\tau^2}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\tau}\frac{dX^\nu}{d\tau}=0$$

其中 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 为 Christoffel 记号

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial X^\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial X^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial X^\sigma})$$

设 $V^\mu=\frac{dX^\mu}{dl}$，则方程化为

$$\frac{dV^\rho}{dl}+\Gamma^\rho_{\mu\nu}V^\mu V^\nu=0$$

考虑到体系可能存在外力（不包括重力/引力，因为其被视为时空本身的性质），测地线方程为：

$$\frac{\partial^2X^\lambda}{\partial\tau^2}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\tau}\frac{dX^\nu}{d\tau}=f^\lambda(X)$$

对于度规 ($d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$)

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\vec{x}^2 = -dt^2 + a(t)^2(dr^2 + r^2 d\Omega^2)$$

作用量为

$$S = -m\int d\tau \left[\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - a(t)^2\left(\frac{d\vec{x}}{d\tau}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

代入测地线方程得到：

$$\frac{d^2}{d\tau^2} + a(t)\dot{a}(t)\left(\frac{d\vec{x}}{d\tau}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(a(t)^2\frac{d\vec{x}}{d\tau}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} + \frac{2\dot{a}(t)}{a(t)}\frac{dt}{d\tau}\frac{d\vec{x}}{d\tau} = 0$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - a(t)^2\left(\frac{d\vec{x}}{d\tau}\right)^2 = 1$$

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij} \qquad\qquad \Gamma^i_{0j} = \Gamma^i_{j0} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j$$

介绍宇宙对应的度规 $a(t) = e^{Ht}$，其中 H 为哈勃常数。设发出信号的时刻为 t_S，有 $R_{max} = e^{-t_S}$。若 $R > R_{max}$，则发出信号永远无法到达 R 处；若 $R_{max} > R > \frac{1}{2}R_{max}$，则信号到达后永远无法收到回音。

以下内容可参考 https://zhuanlan.zhihu.com/p/163704300

为方便计算，可同时在 Christoffel 记号等式左右两边乘上 $dx^\mu dx^\nu$：

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma})dx^\mu dx^\nu \\ &= \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(dg_{\mu\sigma}dx^\mu + dg_{\nu\sigma}dx^\nu - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}dx^\mu dx^\nu) \\ &= g^{\lambda\sigma}(dg_{\mu\sigma}dx^\mu - \frac{1}{2}\frac{\partial ds^2}{\partial x^\sigma})\end{aligned}$$

例 1，对于 $ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 = 0dt^2 + 0dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\theta}_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} &= g^{\theta\theta}(dg_{\theta\theta}d\theta - \frac{1}{2}\frac{\partial ds^2}{\partial\theta}) \\ &= \frac{1}{r^2}(2rdrd\theta - \frac{1}{2}2r^2\sin\theta\cos\theta d\phi^2) \\ &= \frac{2}{r}drd\theta - \sin\theta\cos\theta d\phi^2\end{aligned}$$

因此

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\phi}_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} &= g^{\phi\phi}(dg_{\phi\phi}d\phi - \frac{1}{2}\frac{\partial ds^2}{\partial\phi}) \\ &= \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(2r^2\sin\theta\cos\theta d\theta d\phi + 2r\sin^2\theta drd\phi - 0) \\ &= 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta d\phi + \frac{2}{r}drd\phi\end{aligned}$$

因此

$$\Gamma^{\phi}_{r\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi r} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \cot\theta$$

验证:

$$\begin{aligned}\Gamma^{\theta}_{r\theta} &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial\theta} - \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial\theta}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot 2r = \frac{1}{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\phi}_{r\phi} &= \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} + \frac{\partial g_{\phi r}}{\partial\phi} - \frac{\partial g_{r\phi}}{\partial\phi}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot 2r\sin^2\theta = \frac{1}{r}\end{aligned}$$

若考虑 $ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$

$$\begin{aligned}\Gamma^{r}_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} &= g^{rr}\left(dg_{rr}dr - \frac{1}{2}\frac{\partial ds^2}{\partial r}\right) \\ &= -\frac{1}{2}(2rd\theta^2 + 2r\sin^2\theta d\phi^2) \\ &= -rd\theta^2 - r\sin^2\theta d\phi^2\end{aligned}$$

$$\Gamma^{r}_{\theta\theta} = -r \qquad \Gamma^{r}_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta$$

例 2，$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)\hat{g}_{ij}dx^idx^j$

$$\begin{aligned}\Gamma^{t}_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} &= g^{tt}(dg_{tt}dt - \frac{1}{2}\frac{\partial ds^2}{\partial t}) \\ &= \frac{1}{-N^2}\left(-2N\dot{N}dt^2 - \frac{1}{2}(-2N\dot{N}dt^2 + 2a\dot{a}d\hat{s}^2)\right) \\ &= \frac{1}{-N^2}(-N\dot{N}dt^2 - a\dot{a}d\hat{s}^2) \\ &= \frac{\dot{N}}{N}dt^2 + \frac{a\dot{a}}{N^2}d\hat{s}^2\end{aligned}$$

$$\Gamma^t_{tt} = \frac{\dot{N}}{N} \qquad\qquad \Gamma^t_{ij} = \frac{a\dot{a}}{N^2}\hat{g}_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= \frac{\hat{g}^{ij}}{a^2}\left(d(a^2\hat{g}_{jk})dx^k - \frac{1}{2}\frac{\partial ds^2}{\partial x^j}\right) \\
&= \frac{\hat{g}^{ij}}{a^2}\left(2a\dot{a}\hat{g}_{jk}dtdx^k + a^2 d\hat{g}_{jk}dx^k - \frac{a^2}{2}\frac{\partial d\hat{s}^2}{\partial x^j}\right) \\
&= \frac{2\dot{a}}{a}dtdx^i + \hat{\Gamma}^i
\end{aligned}$$

$$\Gamma^i_{tj} = \Gamma^i_{jt} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j \qquad\qquad \Gamma^i_{jk} = \hat{\Gamma}^i_{jk}$$

例 3 $ds^2 = I_{ab}(u)du^a du^b + r^2(u)\hat{g}_{ij}(x)dx^i dx^j$

$$\begin{aligned}
\Gamma^a &= I^{ab}\left(dI_{bc}du^c - \frac{1}{2}\frac{\partial d\bar{s}^2}{\partial u^b} - \frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial u^b}d\hat{s}^2\right) \\
&= \bar{\Gamma}^a - rI^{ab}\partial_b r d\hat{s}^2
\end{aligned}$$

$$\Gamma^a_{bc} = \bar{\Gamma}^a_{bc} \qquad\qquad \Gamma^a_{ij} = -rI^{ab}\partial_b r\hat{g}_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^i &= \frac{\hat{g}^{ij}}{r^2}\left(d(r^2\hat{g}_{jk})dx^k - \frac{1}{2}\frac{\partial ds^2}{\partial x^j}\right) \\
&= \frac{\hat{g}^{ij}}{r^2}\left(2r(\partial_a r)\hat{g}_{jk}du^a dx^k + r^2 d\hat{g}_{jk}dx^k - \frac{r^2}{2}\frac{\partial d\hat{s}^2}{\partial x^j}\right) \\
&= 2\frac{\partial_a r}{r}du^a dx^i + \hat{\Gamma}^i
\end{aligned}$$

$$\Gamma^i_{aj} = \Gamma^i_{ja} = \frac{\partial_a r}{r}\delta^i_j \qquad\qquad \Gamma^i_{jk} = \hat{\Gamma}^i_{jk}$$

$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$ 如何导出?

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x^2 = r^2\sin^2\theta\cos^2\phi \\ y^2 = r^2\sin^2\theta\sin^2\phi \\ z^2 = r^2\cos^2\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx^2 = (\sin^2\theta\cos^2\phi)dr^2 + (r^2\cos^2\phi)d\sin^2\theta + (r^2\sin^2\theta)d\cos^2\phi \\ dy^2 = (\sin^2\theta\sin^2\phi)dr^2 + (r^2\sin^2\phi)d\sin^2\theta + (r^2\sin^2\theta)d\sin^2\phi \\ dz^2 = (\cos^2\theta)dr^2 + (r^2)d\cos^2\theta \end{cases}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \begin{cases} (\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta)dr^2 \\ \quad r^2\left[(\cos^2\phi + \sin^2\phi)d\sin^2\theta + d\cos^2\theta\right] \\ \qquad\qquad r^2\sin^2\theta(d\cos^2\phi + d\sin^2\phi) \end{cases}$$

5 记号 & 曲率张量

定义协变导数：

$$D_\lambda W^\mu \equiv \partial_\lambda W^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} W^\nu$$

引入记号：

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad W^\mu_{,\lambda} \equiv \partial_\lambda W^\mu \qquad W^\mu_{;\lambda} \equiv D_\lambda W^\mu$$

$$W^\mu_{;\lambda} = W^\mu_{,\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} W^\nu$$

A^μ 和 B^ν 为向量场，定义传播子 (commutator) $C = [A, B]$：

$$C^\nu = [A, B]^\nu = A^\mu(\partial_\mu B^\nu) - B^\mu(\partial_\mu A^\nu) = A^\mu(D_\mu B^\nu) - B^\mu(D_\mu A^\nu)$$

$$D_\mu W^\mu = \partial_\mu W^\mu + \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g}\right) W^\mu$$

$$D_\lambda W^\mu \equiv \partial_\lambda W^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} W^\nu$$

黎曼曲率张量 (Riemann curvature tensor)

$$R^\sigma_{\rho\mu\nu} = (\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa_{\nu\rho}) - (\partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} + \Gamma^\sigma_{\nu\kappa}\Gamma^\kappa_{\mu\rho})$$

注意该张量反对称（以下参考：https://zhuanlan.zhihu.com/p/163705623）

$$R^\lambda_{\rho\mu\nu} = \left(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\right) + \left(\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\right) = -R^\lambda_{\rho\nu\mu}$$

考虑外积和张量积的关系：

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu$$

$$\begin{aligned} R^\lambda_{\rho\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu &= \frac{1}{2!}\left(R^\lambda_{\rho\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu + R^\lambda_{\rho\nu\mu} dx^\nu \otimes dx^\mu\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2!} R^\lambda_{\rho\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \Omega^\lambda_\rho} \end{aligned}$$

$$d(f dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \cdots) = df \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \cdots = (\partial_\lambda f) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \cdots$$

为方便曲率张量计算，尝试

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\right) dx^\mu \wedge dx^\nu &= \left(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu\right) \\ &= \left(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} dx^\nu \wedge dx^\mu\right) \\ &= \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \left(d\Gamma^\lambda_{\nu\rho} \wedge dx^\nu\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\right)dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}=&\frac{1}{2}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\right)\\ =&\frac{1}{2}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}dx^{\mu}\wedge\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}dx^{\nu}+\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}dx^{\nu}\wedge\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}dx^{\mu}\right)\\ =&\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}dx^{\mu}\right)\wedge\left(\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}dx^{\nu}\right)=A^{\lambda}_{\sigma}\wedge A^{\sigma}_{\rho}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R^{\lambda}_{\rho\mu\nu}dx^{\mu}\otimes dx^{\nu}&=\frac{1}{2!}R^{\lambda}_{\rho\mu\nu}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}=\Omega^{\lambda}_{\rho}\\ &=\frac{1}{2}\left[\left(\partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}-\partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\right)+\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\right)\right]dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\\ &=\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}-\partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\right)dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}+\frac{1}{2}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\right)dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\\ &=\left(d\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\wedge dx^{\nu}\right)+\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}dx^{\mu}\right)\wedge\left(\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}dx^{\nu}\right)\\ &=\boxed{dA^{\lambda}_{\rho}+A^{\lambda}_{\sigma}\wedge A^{\sigma}_{\rho}=\Omega^{\lambda}_{\rho}}\end{aligned}$$

$$R_{klij}=g_{lm}R^{m}_{kij}$$

$$R=R_{klij}dx^{k}\otimes dx^{l}\otimes dx^{i}\otimes dx^{j}$$

$$R=R^{l}_{kij}dx^{k}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{l}}\otimes dx^{i}\otimes dx^{j}$$

介绍 Bianchi 恒等式

$$R_{abcd}+R_{adbc}+R_{acdb}=R_{a[bcd]}=0$$

$$\nabla_{e}R_{abcd}+\nabla_{d}R_{abec}+\nabla_{c}R_{abde}=R_{ab[cd;e]}=0$$

里奇张量，或里奇曲率张量（Ricci curvature tensor）是一个在黎曼流形每点的切空间上的对称双线性形式，提供了一个数据去描述给定的黎曼度规 (Riemannian metric) 所决定的体积对 n-欧氏空间的偏离程度。

$$\mathrm{Ric}=\sum_{ij}R_{ij}dx^{i}\otimes dx^{j}=R_{ij}dx^{i}\otimes dx^{j}=\sum_{k}R^{k}_{ikj}dx^{i}\otimes dx^{j}$$

$$R_{\beta\nu}\equiv R^{\alpha}_{\beta\alpha\nu}$$

另有曲率标量（curvature scalar）

$$R\equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

6 爱方程如何推导

参考 *https://www.zhihu.com/question/53496530/answer/544322909*

参考 *https://www.zhihu.com/question/53496530/answer/258731044*

描述广义相对论的场方程一定是这么个形式：$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$，其中左边 $G^{\mu\nu}$ 叫爱因斯坦张量（Einstein tensor），描述了空间弯曲的情况，右边 κ 是个系数不重要，$T^{\mu\nu}$ 叫能动张量（stress-energy tensor），描述了物质能量的分布情况。右边比较简单，我们已经很清楚能动张量是个什么东西，关键是左边，爱因斯坦张量到底是个什么形式。这个就要靠猜了。

但是我们知道有这么几个条件：

- 首先爱因斯坦方程必须是个张量方程，因为只有这样它才能在参考系变换中保持不变，才能在任意参考系中都成立；

- 我们已经知道了能动张量的对称性，即 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$，所以左边的爱因斯坦张量也必须得要有 $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$；

- 我们知道在经典极限时，它必须能近似成牛顿引力 $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$。

在经典力学中，重力被表述为 $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$，其中 Φ 是经典力学中的重力势。在往相对论的方向推广时，密度的地位会被能动张量（energy-momentum tensor）所替代，而重力势 Φ 所描述的重力则要转而取决于时空的度规（metric）$g_{\mu\nu}$。

于是我们可以先对推广之后的张量方程的形式做一些猜测。首先，通过观察上述式子，我们可以合理地猜测最终的方程应该有如下性质

$$F(g, \partial_\lambda g, \partial_\gamma\partial_\sigma g)_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}$$

其中 $F_{\mu\nu}$ 是一个取决于度规及其一阶和二阶导数的 (0,2) 型张量。于是，一个很自然的尝试便是里奇张量（Ricci tensor）：

$$F_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$$

但这显然是不正确的，因为我们有

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \qquad\qquad \nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R$$

我们可以构造

$$\nabla^\mu(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) = \nabla^\mu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\mu R = \nabla^\mu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\nu R = 0 = \nabla^\mu T_{\mu\nu}$$

于是便可以写下

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

接下来的目标便是确定系数 κ。我们知道，当物体运动速度远小于光速，且重力场为静态的弱场时，上述方程会退化为经典力学中的情况；我们可以利用这一点来确定 κ。首先写下理想流体的能动张量

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}$$

在低速情况下，能动张量中的压强可以忽略不计，因此

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu$$

于是在相对流体静止的参照系中我们有

$$T_{00} = \rho$$

因此得到

$$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = -\rho$$

$$R = \kappa\rho$$

所以有 $R_{00} = \frac{1}{2}\kappa\rho$。根据 $R_{\mu\nu}$ 的定义，我们知道 $R_{00} = R^{\mu}_{0\mu 0}$。其中，利用黎曼张量反对称可立即得到 $R^{0}_{000} = 0$。再加上为了得到牛顿极限我们默认此时重力场是静态的，于是度规的所有一阶导数都为零，最终化简得到

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}$$

其中 h_{00} 是度规的扰动 $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ 的 (00) 分量，即有

$$\nabla^2 h_{00} = -\kappa\rho$$

由测地线方程可以推出，为了得到经典力学极限，必须令 $h_{00} = -2\Phi$。因此

$$\nabla^2(-2\Phi) = -2\nabla^2\Phi = -\kappa\rho$$

将上式与经典力学中的 $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ 比较，可以立即得到

$$\kappa = 8\pi G$$

于是便可确定场方程 (Einstein Field Equations)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

更进一步，考虑到广义相对论中所用到的联络（connection）与度规是相容的，也就是说 $\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0$，于是我们发现如果往上述方程的左边再加入一项 $\Lambda g_{\mu\nu}$，方程仍然合理，因为此时左右两边取协变导数 ∇^μ 都为零。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

方程中的 Λ 称为宇宙学常数（cosmological constant），它被认为是暗能量的一种可能的形式，为了得到宇宙学常数，我们可以在原来的方程右边加上一项代表真空能量密度的能动张量 $T^{(vac)}_{\mu\nu} = \rho^{(vac)} g_{\mu\nu}$，得到

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu} + T^{(vac)}_{\mu\nu})$$

化简可得 $\rho^{(vac)} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$。由于真空能量密度与宇宙学常数之间只相差了一个常数因子，因此在很多情况下这两个概念可以被认为是等同的。

7 广义相对论的实验验证

参考赵峥《广义相对论基础》第四章

1927 年，G. D. Birkhoff 证明，真空球对称度规一定静态，应写成与时间 t 无关的形式:

$$ds^2 = b(r)c^2dt^2 + a(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

- 只要引力源球对称，源外真空引力场（度规场）就一定静态球对称；
- 不管引力源静态还是动态，只要源内物质分布始终球对称，源外真空引力场就一定球对称，而且一定静态；

假设待定函数 a 与 b 可以写成

$$a(r) \equiv e^{\mu(r)} \qquad\qquad b(r) \equiv -e^{\nu(r)}$$

计算其对应度规、Christoffel 记号、里奇张量，代入真空场方程得到

$$\frac{d\mu}{dr} + \frac{d\nu}{dr} = 0 \qquad\qquad 1 - e^{\mu} - r\frac{d\mu}{dr} = 0$$

$$\mu + \nu = A \qquad\qquad e^{-\mu} = 1 - \frac{B}{r}$$

参考牛顿引力势关系，得到常数 B 为 $2GM/c^2$，最终得到静态球对称真空的线元为

$$ds^2 = -c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

即场方程的史瓦西解，只依赖于引力源的总质量，与物质密度随 r 的分布无关，与引力源体积也无关。当 r 趋向无穷时，上式化为

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

定义引力半径

$$r_g = \frac{2GM}{r^2}$$

即黑洞的视界。在视界内部，r 不再是空间坐标，而是时间坐标。除 r 趋于无穷情况之外，dr 都不是固有距离，不具有测量意义。

原子发射光谱固有频率随参考系发生变化，但振动次数相同

$$\nu_1 d\tau_1 = dN_1 = dN_2 = \nu_2 d\tau_2$$

$$\nu_2 = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) / \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right)} \cdot \nu_1$$

则在无穷远处总观察到引力红移，原因归于标准钟变慢了。

水星近日点的进动检测的是 $\left(\frac{GM}{c^r}\right)$ 的二级效应，因此是广义相对论三大验证中最重要的一个。

$$\Delta\varphi \propto \left(\frac{GM}{c^2R}\right)^2$$

根据广义相对论的时空弯曲理论，可以预测光线将在引力场中偏折。与“引力红移”一致，二者均检测 $\left(\frac{GM}{c^r}\right)$ 的一级效应。严格来说，“引力红移”只验证了等效原理，“光线偏折”和“行星轨道进动”验证了场方程。

8 黑洞物理入门

参考赵峥《广义相对论基础》第六章

史瓦西时空是号差为 ± 2 的黎曼时空，在这种与 Minkovski 时空类似、具有不定度规的时空中，有可能存在一种特殊的超曲面，其法矢量类光；即法矢量长度为零，但法矢量本身不为零。这种超曲面称为零超曲面（类光超曲面、零曲面），其法矢量躺在它的切平面上，既是法矢量，又是切矢量。设

$$f(x^\mu) = f(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0$$

为四维时空中的一张三维超曲面，其法矢量定义为

$$n_\mu = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

法矢量的长度定义为

$$n_\mu n^\mu = g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu}$$

若上式等于 0，则此超曲面是一个零曲面。若保有时空的对称特性，我们称这类特殊的零曲面为事件视界，简称视界。

对于史瓦西解

$$ds^2 = -c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

在 $r=0$ 处有一个奇点，在 $r=\frac{2GM}{c^2}$ 有一个奇面（坐标奇异性，时空曲率于此并不发散，因坐标系选择不当导致）。奇面虽不表示时空本身有毛病，但仍有重要意义，即黑洞表面，也是无限红移面，钟无限变慢。

在黑洞内部，由于 $r < \frac{2GM}{c^2}$，$g_{00} > 0$，洞内的等 r 面变成了等时面，成为单向膜；$r=0$ 不应理解成“球心”，而是时间的终点（不属于时空）。类似有白洞，其“球心”为时间的起点，等 r 面仍为单向膜，但方向朝外。

设质点最初静止在 $r=r_0$ 处自由下落，用 I. D. Novikow 坐标系来描述：

$$ds^2=-d\tau^2+\left(\frac{R^2+1}{R^2}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2dR^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

Novikow 系坐标时间 τ 恰为自由下落质点的固有时间，其坐标 (τ,R) 与史瓦西坐标 (t,r) 之间的关系，用参数坐标 (η,r_0) 来联系

$$\begin{cases}\tau=\dfrac{r_0}{2}\left(\dfrac{r_0}{2M}\right)^{1/2}(\eta+\sin\eta)\\ R=\left(\dfrac{r_0}{2M}-1\right)^{1/2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}t=2M\ln\left|\dfrac{\left(\frac{r_0}{2M}-1\right)^{1/2}+\tan\frac{\eta}{2}}{\left(\frac{r_0}{2M}-1\right)^{1/2}-\tan\frac{\eta}{2}}\right|+2M\left(\dfrac{r_0}{2M}-1\right)^{1/2}\left[\eta+\dfrac{r_0}{4M}(\eta+\sin\eta)\right]\\ r=\dfrac{r_0}{2}(1+\cos\eta)\end{cases}$$

$\eta=0$ 时，$r=r_0$ 且 $\tau=0$，即质点静止初态。当其到达黑洞表面时 $r=2M$ (自然单位制)，有

$$\cos\eta=\frac{4M}{r_0}-1$$

不难看出这时 τ 有限值。当 $r=0$，即落到奇点时，我们有 $\eta=\pi$，于是

$$\tau=\frac{\pi r_0}{2}\left(\frac{r_0}{2M}\right)^{1/2}$$

可见，对于质点而言，其可穿过视界，并在有限固有时间内到达奇点。但无穷远的静止观测者认为，质点只能无穷靠近黑洞表面，永远落不进去，只会逐渐变红，光信号也越来越稀疏。

定义乌龟坐标

$$r*=r+2M\ln\left|\frac{r-2M}{2M}\right|$$

可将 $r\to 2M$ 的视界推到 $r*\to-\infty$。

定义 Eddington-Finkelstein 坐标 v 和 u，简称爱丁顿坐标

$$v=t+r \qquad\qquad u=t-r$$

v 称超前爱丁顿坐标（入射），u 称滞后爱丁顿坐标（出射），用二者表述的史瓦西时空线元分别为

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dv^2+2dvdr+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)du^2-2dudr+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

式中 v 和 u 起时间作用，在奇面处不再发散，可同时覆盖视界内外和视界面本身。

介绍能够覆盖整个史瓦西时空的 Kruskal 坐标系：

$r > 2M$，I 区

$$\begin{cases} T = 4M\left(\dfrac{r}{2M}-1\right)^{1/2} e^{r/4M} sh\dfrac{t}{4M} \\ R = 4M\left(\dfrac{r}{2M}-1\right)^{1/2} e^{r/4M} ch\dfrac{t}{4M} \end{cases}$$

$r > 2M$，II 区

$$\begin{cases} T = -4M\left(\dfrac{r}{2M}-1\right)^{1/2} e^{r/4M} sh\dfrac{t}{4M} \\ R = -4M\left(\dfrac{r}{2M}-1\right)^{1/2} e^{r/4M} ch\dfrac{t}{4M} \end{cases}$$

$r < 2M$，F 区

$$\begin{cases} T = 4M\left(1-\dfrac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} ch\dfrac{t}{4M} \\ R = 4M\left(1-\dfrac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} sh\dfrac{t}{4M} \end{cases}$$

$r < 2M$，P 区

$$\begin{cases} T = -4M\left(1-\dfrac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} ch\dfrac{t}{4M} \\ R = -4M\left(1-\dfrac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} sh\dfrac{t}{4M} \end{cases}$$

把史瓦西时空中的线元变成

$$ds^2 = \frac{2M}{r} e^{-r/2M}(-dT^2 + dR^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

(R,T) 即 Kruskal 坐标，T 是时间坐标，R 是空间坐标；其中 r 与 R、T 的关系为

$$16M^2\left(\frac{r}{2M}-1\right)e^{r/2M} = R^2 - T^2$$

Kruskal 坐标系可以统一描述整个史瓦西时空，不仅覆盖了黑洞内外及视界，还扩大了史瓦西时空；并能对流形上的一切过程（黑洞过程、白洞过程）作完备描述，即除去通往内禀奇点的测地线之外，其他所有的测地线都可以无限延伸，通向无穷远。I 区即通常的黑洞外部宇宙，F 区为黑洞区，P 区为白洞区，II 区市另一个洞外宇宙，它和我们的宇宙没有因果连通，没有任何信息交流。

Penrose 图，通过共形变换，将 Minkovski 时空中的“无限远”压到了有限的距离之内。。。

不随时间变化的带电球状物体周围的真空引力场（即时空弯曲状况），可以从 Einstein 场方程解出，称为 Reissner-Nordstrom 解。自然单位下，线元为：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

M、Q 分别为场源的质量和电荷。这是一个电磁真空解，在带电球状体之外，除电磁场外不存在任何其他物质。它所描述的弯曲时空静态、球对称；即时空的弯曲情况呈球对称，且不随时间变化。

1963 年，R. P. Kerr 得出了场方程的一个稳态轴对称解

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left[(r^2 + a^2)\sin^2\theta + \frac{2Mra^2\sin^4\theta}{\rho^2}\right] d\phi^2 - \frac{4Mra\sin^2\theta}{\rho} dt d\phi$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta \qquad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

由于度规不含 t 和 ϕ，所以为稳态轴对称时空。但其非静态，因为存在 $dtd\phi$ 交叉项。

此解一共有两个参量，质量 M 和角动量 J，在上面的式子中，角动量 J 以单位质量角动量 a 的形式出现，$a = J/M$。后来，E. T. Newman 等把 Kerr 解推广到带电情况，得到 Kerr-Newman 解，来描述一个转动带电星体的外部引力场，即描述该星体外部时空的弯曲情况。自然单位制下有

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ &+ \left[(r^2 + a^2)\sin^2\theta + \frac{(2Mr - Q^2)a^2\sin^4\theta}{\rho^2}\right] d\phi^2 - \frac{2(2Mr - Q^2)a\sin^2\theta}{\rho^2} dt d\phi \end{aligned}$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta \qquad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$$

与 Kerr 解类似，这是一个稳态、轴对称的时空，度规中不含 t 和 ϕ，但同样时轴不正交。它由三个参数确定：星体的总质量 M、总角动量 J（$a = J/M$）、总电荷 Q。

注意，上述解都是真空解，即星体外部都是真空区。带电情况下，星体外部是电磁真空，即不存在电磁场以外的任何物质。

Kerr-Newman 时空在 $M \neq 0$，$J \neq 0$ 但 $Q = 0$ 时回到 Kerr 时空；在 $M \neq 0$，$Q \neq 0$ 但 $J = 0$ 时回到 R-N 时空；在 $M \neq 0$，$J = 0$，$Q = 0$ 时回到史瓦西时空。

该时空在 $r = 0$，$\theta = \pi/2$ 和

$$r_\pm = \frac{GM}{c^2} \pm \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{J}{Mc}\right)^2 - \frac{GQ^2}{c^4}}$$

处度规存在奇异性。

对于 $\nu = \nu_0\sqrt{-g_{00}}$，若存在无限红移，要求 $g_{00} = 0$，由此可解出 Kerr-Newman 时空有两个无限红移面：

$$r_\pm^s = M \pm \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta - Q^2}$$

Kerr-Newman 时空的视界为（$g^{\mu\nu}\partial_\mu f \partial_\nu f = 0$）

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$$

质点可以在 Kerr-Newman 时空的外无限红移面之外静止，也可以在内无限红移面之内静止。在红移面上，质点不能静止。若在间隔类空的能层区，质点静止相当于作超光速运动，为广义相对论禁止，即不可能静止，在转动黑洞引力场作用下将被迫运动。马赫预言，转动物体会对周围的物质产生拖拽作用 $\Omega = d\phi/dt$。在视界上 $\hat{g}_{00} = 0$，拖拽速度只能取一个确定值

$$\Omega = \lim_{r \to r_\pm} \left(\frac{-g_{03}}{g_{33}} \right) = \frac{a}{r_\pm^2 + a^2}$$

表面引力 κ 定义为，在物体趋近于黑洞表面时，所受到的固有加速度 b 与红移因子乘积的极限

$$\kappa_\pm = \lim_{r \to r_\pm} b\sqrt{-\hat{g}_{00}} = \frac{r_+ - r_-}{2(r_\pm^2 + a^2)}$$

对于带电的 Kerr-Newman 黑洞，还可以算出它视界面两极处的静电势

$$V_\pm = \frac{Q r_\pm}{r_\pm^2 + a^2}$$

在能层中除去通常的正能轨道外，还存在负能轨道。研究表明，这些负能轨道都是角动量为负的轨道，即与黑洞转动方向相反的轨道。若一在无穷远处能量为 E 的物体，在不受外力的情况下飞向黑洞，进入能层后碎成两块，一块 E_1 沿负能量轨道落入黑洞内部，另一块能量为 E_2 的碎片逃出能层沿着测地线飞往无穷远。根据能量守恒

$$E_2 = E - E_1 > E$$

用这种方法从黑洞的能层中提取能量，称为 Penrose 过程。落入黑洞的负能量物体带有负的角动量，将使黑洞的能量和角动量减小，转速变慢，能层缩小。因此，Penrose 过程提取的是黑洞的转动能量，反复施加这一过程，会令 Kerr 黑洞退化为不转动的史瓦西黑洞，Kerr-Newmann 黑洞退化为不转动的 R-N 黑洞。

<u>黑洞无毛定理</u>：形成黑洞的星体，失去了除总质量 M、总动量 J、总电荷 Q 外的全部信息。黑洞的全部性质只由 M、J、Q 这三个参量决定。

J. Bekenstein & L. Smarr 发现有公式

$$M = \frac{\kappa_+}{4\pi} A_+ + 2\Omega_+ J + V_+ Q$$

$$A_+ = 4\pi(r_+^2 + a^2) \qquad \kappa_+ = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)} \qquad \Omega_+ = \frac{a}{r_+^2 + a^2} \qquad V_+ = \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2}$$

$$dM = \frac{\kappa_+}{8\pi} dA_+ + \Omega_+ J + V_+ Q$$

此公式与转动物体的热力学第一定律的表达式极为相似

$$dU = TdS + \Omega dJ + VdQ$$

通过类比，黑洞应该有与其面积 A 成正比的熵 S，和与其表面引力 κ 成正比的温度 T

$$S = \frac{k_B}{4} A_+ \left(\frac{c^3}{G\hbar}\right) \qquad T = \frac{\hbar\kappa_+}{2\pi k_B c}$$

对于极端黑洞，$M^2 = a^2 + Q^2$，这导致内外视界重合，则表面引力为零。类比得到，极端黑洞应视为绝对零度的黑洞。根据热力学第三定律，不能通过有限次操作把一个热力学系统的温度降到绝对零度；此独立于热力学一二定律之外。类似有，不能通过有限次操作，把一个非极端黑洞转变为极端黑洞。。。综上有黑洞热力学四定律：

- 第零定律：稳态黑洞表面引力 κ_+ 常数
- 第一定律：$dM = \frac{\kappa_+}{8\pi} dA_+ + \Omega_+ J + V_+ Q$
- 第二定律：黑洞面积在顺时方向永不减少，$dA_+ \geq 0$
- 第三定律：不能通过有限次操作把黑洞表面引力降为零

霍金辐射。。。。。。

9 宇宙学简介

\# 参考赵峥《广义相对论基础》第七章

宇宙学原理：宇宙中的物质始终均匀、各向同性分布。

为得到不随时间变化的静态宇宙模型，必须在场方程中加入“排斥效应”，以求出有限无边的静态宇宙模型。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

常数 Λ 称为宇宙学常数。

一般把 $\Lambda = 0$ 称为 Friedmann 模型，$\Lambda \neq 0$ 称为 Lemaitre 模型。Einstein 的静态宇宙模型只是一种特殊情况。

有三个观测结果支持大爆炸宇宙模型：

1. 哈勃定律：星系的宇宙学红移与星系离我们的距离成正比 $v = HD$

2. 宇宙中 He 丰度，约为 25%

3. 微波背景辐射，温度大约为 2.7K

考虑四维平直欧氏空间其中镶嵌的三维超球面

$$x^\mu x^\mu = x^i x^i + x^4 x^4 = \frac{1}{K}$$

应为曲率为 K 的三维常曲率空间

$$dx^4 = -\frac{x^i dx^i}{x^4}$$

$$(dx^4)^2 = \frac{(x^i dx^i)^2}{\frac{1}{K} - x^i x^i} = \frac{K(x^i dx^i)^2}{1 - K x^i x^i}$$

$$d\sigma^2 = dx^\mu dx^\mu = dx^i dx^i + \frac{K(x^i dx^i)^2}{1 - K x^i x^i}$$

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

此即球坐标下三维超球面上的线元。当 $K > 0$ 时，它就是通常的超球面；当 $K = 0$ 时，即通常的超平面；当 $K < 0$ 时，它就是一个伪超球面。

宇宙学原理告诉我们，三维空间的曲率应该处处相同。虽然曲率有可能随时间变化，但这种变化必须保证 K 在任何时候都只是时间的函数，不是空间的函数。因此宇宙四维时空度规的普遍形式为

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right]$$

上式所表示的度规就是作为运动学宇宙论核心的 Roberston-Walker 度规，K 可以取正、负、零，这里采用的空间坐标是随动坐标，即质元随宇宙膨胀时它的空间坐标不变，空间两点间距离与 a(t) 成正比，因此 a(t) 称为<u>宇宙尺度因子</u>。

$$\rho = \frac{3}{8\pi G}\left[\frac{K}{a^2} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] = \frac{3K}{8\pi G a^2} + \frac{3}{8\pi G}H^2$$

临界密度定义为

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G}H^2 = 5 \times 10^{-30} g/cm^3 \approx 3 nucleon/m^3$$

另外

$$p = -\frac{1}{8\pi G}\left[\frac{K}{a^2} + H^2(1 - 2q_0)\right]$$

其中

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$$

称为减速因子。对于松散介质 $p = 0$，有 $K = a^2 H^2(2q_0 - 1)$

宇宙中物质密度	红移的减速因子	三维空间曲率	宇宙类型	膨胀特点
$\rho > \rho_c$	$q_0 > 1/2$	正	有限无边	脉动
$\rho = \rho_c$	$q_0 = 1/2$	零	无限无边	永远膨胀
$\rho < \rho_c$	$q_0 < 1/2$	负	无限无边	永远膨胀

观测表明 $\rho < \rho_c$ 但 $q_0 > 1/2$，虽然结论相反，但得到的空间曲率和零相差不大。。。观测发现减速因子随时间变化，宇宙从减速膨胀变成了加速膨胀；为解释这一现象，人们引入了“暗能量”假设，认为宇宙中不仅存在大量暗物质，还存在大量产生排斥效应的暗能量，宇宙演化过程时普通物质、暗物质、暗能量共同作用的结果。